

Đáp án Toán kinh tế 2, (CLC) HK2, NH 24-25
Câu I:1) Đặt $F(P, S) = 2S^3e^{2P} + P^2 \ln(S + 3)$. Khi đó

$$F_S = 6S^2e^{2P} + P^2 \frac{1}{S+3} \quad (0.25)$$

$$F_P = 4S^3e^{2P} + 2P \ln(S + 3) \quad (0.25)$$

Từ đó

$$P'(S) = -\frac{F_S}{F_P} = -\frac{6S^2e^{2P} + P^2 \frac{1}{S+3}}{4S^3e^{2P} + 2P \ln(S + 3)} \quad (0.25)$$

Vì $S > -2$ nên $S + 3 > 1$, suy ra $\ln(S + 3) > 0$. Do đó $P'(S) < 0$. Như vậy nếu S tăng thì P giảm và ngược lại. (0.25)

2) Ta có $\begin{matrix} Q &= 4 - 2(P + T_1) \\ Q &= 1 + 1/2(P - T_2) \end{matrix}$. Suy ra $Q = 8/5 - 5/2T_1 - 5/2T_2$ (0.25)

Từ đó

$$\frac{\partial Q}{\partial T_1} = \frac{\partial Q}{\partial T_2} = -5/2 \quad (0.5)$$

Câu này có nhiều cách làm, sinh viên có thể sử dụng vi phân toàn phần các hàm ẩn rồi lần lượt giải từng hệ để tìm các đạo hàm riêng

Ý nghĩa: Nếu T_2 không đổi thì Q giảm 5/2 đơn vị khi T_1 tăng 1 đơn vị.

Nếu T_1 không đổi thì Q giảm 5/2 đơn vị khi T_2 tăng 1 đơn vị. (0.25)

Câu II. 1) Hàm Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = P_1Q_1 + P_2Q_2 + \lambda(U_0 - 4Q_1Q_2) \quad (0.25)$$

Điều kiện bậc 1

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{Q_1} = P_1 - 4\lambda Q_2 = 0 \\ \mathcal{L}_{Q_2} = P_2 - 4\lambda Q_1 = 0 \\ \mathcal{L}_{\lambda} = U_0 - 4Q_1Q_2 = 0 \end{cases} \quad (0.5)$$

$$\begin{cases} P_1 = 4\lambda Q_2 & (1) \\ P_2 = 4\lambda Q_1 & (2) \\ U_0 = 4Q_1Q_2 & (3) \end{cases}$$

Lấy (1) chia (2) ta được $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{P_1}{P_2}$.

Suy ra $Q_2 = \frac{P_1}{P_2}Q_1$ (4) (0.25). Thay vào (3) ta được

$$U_0 = 4\frac{P_1}{P_2}Q_1^2$$

Suy ra

$$Q_1 = \sqrt{\frac{U_0P_2}{4P_1}} \equiv Q_1^*$$

Thay vào (4) ta được

$$Q_2 = \sqrt{\frac{U_0P_1}{4P_2}} \equiv Q_2^* \quad (0.25)$$

2) Từ đó

$$E^*(P_1, P_2, U_0) = E(Q_1^*, Q_2^*) = [P_1Q_1^* + P_2Q_2^*] = \sqrt{U_0P_1P_2} \quad (0.25).$$

Suy ra

$$E^*(tP_1, tP_2, tU_0) = \sqrt{tU_0 tP_1 tP_2} = t^{3/2} E^*(P_1, P_2, U_0) \forall t \geq 0 \quad (0.25)$$

Do đó E^* là một hàm thuần nhất bậc $3/2$ theo các biến P_1, P_2, U_0 (0.25)

SV có thể chứng minh nó là hàm thuần nhất bậc 1 theo P_1, P_2 khi U_0 cố định.

Câu III. 1) Ta có giá trị hiện tại của dòng tiền là

$$PV = \int_0^6 2e^{-0,35t} e^{-0,15t} dt = 3,80085 \quad (0.5)$$

Giá trị tương lai của dòng tiền là

$$FV = e^{6,0,15} PV \left(= \int_0^6 2e^{-0,35t} e^{0,15(6-t)} dt \right) = 9,34859 \quad (0.5)$$

SV chỉ cần sử dụng 1 trong hai công thức trên.

2.a) Ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} k e^{-1/8x} dx = 1 \quad (0.25)$$

$$\Leftrightarrow k(-8)e^{-1/8x} \Big|_0^{\infty} = 1 \quad (0.25)$$

$$\Leftrightarrow 8k = 1 \Leftrightarrow k = 1/8. \quad (0.25)$$

b) Ta có

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} 1/8 x e^{-1/8x} dx \quad (0.25)$$

$$= 1/8 \left((-8x)e^{-1/8x} - 64e^{-1/8x} \right) \Big|_0^{\infty} \quad (0.25)$$

$$= 8 \quad (0.25)$$

Câu IV. 1) Thay dữ liệu vào ta được

$$Y_t = 400 + 0,6Y_{t-1} \quad (0.25)$$

Giá trị cân bằng

$$Y^* = \frac{400}{1 - 0,6} = 1000 \quad (0.25)$$

Từ đó

$$Y_t = Y^* + (Y_0 - Y^*)\phi^t = 1000 - 200, (0,6)^t \quad (0.5)$$

2). Phương trình có dạng

$$\frac{dR}{dt} + kR = kS \Leftrightarrow \frac{dR}{dt} + kR = k \text{ (do } (S = 1)). \text{ Giá trị cân bằng}$$

$$R^* = 1. \quad (0.25)$$

Nghiệm của bài toán là

$$R(t) = R^* + (R(0) - R^*)e^{-kt} = 1 + 19e^{-kt} \quad (0.25)$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, sinh viên có thể dùng thừa số tích phân để giải.

$$\text{Vì } R(2) = 15 \implies k = -1/2 \ln(14/19) \quad (0.25)$$

Vậy $R(t) = 1 + 19e^{1/2 \ln(14/19)t}$. Từ đó

$$R(4) = 1 + 19e^{2 \ln(14/19)} = 215/19 \simeq 11.316. \quad (0.25)$$

3) Phương trình đặc trưng

$$r^2 + 9r + 8 = 0 \implies r = -1, r = -8 \quad (0.25)$$

Giá trị cân bằng $P^* = \frac{80}{8} = 10$ (0.25). Nghiệm tổng quát

$$P(t) = 10 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-8t} \quad (0.25)$$

Suy ra

$$P'(t) = -A_1 e^{-t} - 8A_2 e^{-8t}$$

Vì $\begin{cases} P(0) = 15 \\ P'(0) = -1 \end{cases}$ ta được hệ

$$\begin{cases} 10 + A_1 + A_2 &= 15 \\ -A_1 - 8A_2 &= -1 \end{cases} \quad (0.25)$$

Giải hệ này ta được $A_1 = 39/7, A_2 = -4/7$ (0.25)

Vậy

$$P(t) = 10 + 39/7 e^{-t} - 4/7 e^{-8t}$$

2) Vì cả hai nghiệm của phương trình đặc trưng là nghiệm thực và âm nên phương trình ổn định. (0.25)